

图形与图象再现的有限元算法

蔡中义^{1,2)} 李明哲²⁾

¹⁾(吉林大学汽车动态模拟国家重点实验室, 长春 130025)

²⁾(吉林大学锻铸工艺研究所, 长春 130025)

摘要 在计算机视觉以及CAD/CAM等领域都涉及到基于离散观测数据的目标图象或三维曲面图形的重建问题,为此,将最佳逼近与数据平滑理论相结合,提出了一种基于有限元技术的图形与图象重建方法.该方法首先采用Lagrange乘子方法建立正定泛函,进而应用有限元技术及Newton迭代方法求得泛函极值解,然后通过有限元解的插值计算,重新构造出图形或图象.由于结合了数据平滑处理,因此该方法不仅消除了数据上噪声的影响,而且提高了重建的精度.实验结果证明了该方法的有效性和实用性.

关键词 图象重建 数据处理 有限元 平滑 最佳逼近

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2002)09-0882-06

Finite Element Algorithm for the Representation of Shape and Image

CAI Zhong-yi^{1,2)}, LI Ming-zhe²⁾

¹⁾(State Key Laboratory of Automobile Dynamic Simulation, Jilin University, Changchun 130025)

²⁾(Roll Forging Institute, Jilin University, Changchun 130025)

Abstract In the areas of computer vision and CAD/CAM, it is often needed to represent an image or a 3D surface from discrete measured data. A novel algorithm for the shape representation and image reconstruction is presented in this paper, which integrates the theories of optimal approximation and data smoothing. A positive definite functional is set up according to Lagrange multiplier method, and solved by finite element method and Newton iteration method. The shape or image is then constructed on the basis of finite element interpolation. This algorithm combines the smoothing processing technique with finite element method, the influence of the noise in input data is eliminated and reconstructing precision is improved. The formulations to calculate Lagrange multiplier and the relevant equations of eight-node isoparametric finite element were derived. Effects of the variations in smoothing factor, in the finite element mesh and in the amount of input data on the reconstructed results were investigated. A Gauss surface and two images of sphere and saddle surface were represented from discrete data with imposed noise, the results show the effectiveness of presented method. To illustrate the applicability of the method, a Morie fringes image of a tensile composite plate containing a hole was reconstructed. The method is conceptually simple and relatively easy and expedient to apply. The number of input data required in the presented method is less than that in numerical interpolation and fitting and the method can be used to the problem of irregular region with covered boundary.

Keywords Image reconstruction, Data processing, Finite element, Smoothing, Optimal approximation

0 引言

基于离散观测数据的目标图象或三维曲面图形

重建是计算机视觉、CAD/CAM等领域广泛研究的课题^[1~3].由于原始数据不可避免地存在各种噪声的干扰,因此基于这些数据来直接进行图形与图象的重现,将导致失真的结果.为获得理想的结果,必

须有效地抑制噪声的影响,比较合理的方法是对数据进行平滑处理.由于基于有限元技术的重建图形图象方法能够将数据平滑与最佳逼近相结合,还可以有效地消除数据上噪声的影响,因此该方法可用于处理任意区域的散乱数据,且重建图形图象的速度快、稳定性好.

1 算法描述

1.1 数据的逼近与平滑

若在区域 R 内分布 T 个数据点,则数据点 x_i 的噪声可表示为

$$n(x_i) = \hat{u}(x_i) - u(x_i) \quad (1)$$

其中, \hat{u} 、 u 分别为 x_i 处给出的数据值与精确值.

通常式(1)是一个二维随机场,假定其具有无偏性,均值为零,则有如下的最佳逼近条件^[4]

$$\sum_{i=1}^T [\hat{u}(x_i) - u(x_i)]^2 = T\sigma_{rms}^2 \quad (2)$$

其中, σ_{rms} 为噪声误差均方根的估计值.

由于目标函数 $u(x)$ 在区域 R 上通常是连续变化的,因此几何上比较平滑和曲率变化均匀,且没有多余的拐点^[5,6],其用二阶导数平方和最小来度量可表示为

$$\text{minimize: } \int_R \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dR \quad (3)$$

由于这种平滑条件保证了重建的图形图象上不带有激烈的起伏波动,从而抑制了噪声.

1.2 目标泛函

满足逼近条件式(2)及平滑条件式(3)的条件极值问题,可由 Lagrange 乘法^[7]建立如下目标泛函

$$\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \int_R \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} \right\}^2 dR + \frac{\lambda}{2} \left\{ \sum_{i=1}^T [u(x_i) - \hat{u}(x_i)]^2 - \Delta \right\} \quad (4)$$

其中, λ 为 Lagrange 乘子; $\Delta = \omega^2 T \sigma_{rms}^2$, ω 为平滑控制因子.

由于根据使上述泛函取得极小值的极值函数来构造的图形图象,不仅能逼近原始数据点,而且抑制了噪声干扰,因而具有足够的光顺性.

2 有限元求解

2.1 有限元格式

尽管泛函式(4)的解析解很难求得,但可采用有

限元方法求其数值解.

将区域 R 划分成 L 个有限单元,共有 M 个自由度.根据有限元插值方法^[8], $u = NU_e$, 其中, N 为形函数矩阵, U_e 为由有限元 e 的节点值构成的列向量,则泛函式(4)可表示成

$$\Phi(U, \lambda) = \frac{1}{2} U^T K_1 U + \frac{\lambda}{2} (U^T K_2 U - 2U^T P + \hat{U}^T \hat{U} - \Delta) \quad (5)$$

其中

$$K_1 = \sum_L \int_{R_e} \sum_{r=1}^2 \sum_{r=1}^2 \frac{\partial^2 N^T}{\partial x_r \partial x_r} \frac{\partial^2 N}{\partial x_r \partial x_r} dR \quad (6)$$

$$K_2 = \tilde{N}^T \tilde{N} \quad (7)$$

$$P = \tilde{N}^T \hat{U} \quad (8)$$

式中, U 为区域 R 内由所有有限元节点值构成的列向量,其中,包含 M 个分量; \hat{U} 为由全部数据点数据值构成的列向量,包含 T 个分量; \tilde{N} 为扩大到整体自由度阶数的形函数矩阵; R_e 为有限元 e 的区域

由泛函式(5)的一阶变分为零,得泛函极值条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} = 0 \text{ 及 } \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \quad (9)$$

将式(5)代入式(9)得有限元方程

$$\begin{cases} (K_1 + \lambda K_2)U = \lambda P \\ U^T K_2 U - 2U^T P + \hat{U}^T \hat{U} = \Delta \end{cases} \quad (10)$$

式(10)代表 $M+1$ 个方程,可确定 U 的 M 个未知数及 Lagrange 乘子 λ .这是关于 λ 的非线性方程组,必须采用迭代方法来求解.

2.2 Lagrange 乘子计算

由式(8)及式(10)的第 1 式得

$$U = (\lambda^{-1} K_1 + K_2)^{-1} \tilde{N}^T \hat{U} \quad (11)$$

将式(11)、式(8)代入式(10)得非线性方程

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & \hat{U}^T \tilde{N} (\lambda^{-1} K_1 + K_2)^{-1} \times \\ & [K_2 (\lambda^{-1} K_1 + K_2)^{-1} - 2I] \times \\ & \tilde{N}^T \hat{U} + \hat{U}^T \hat{U} - \Delta = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

这里, $f(\lambda)$ 实际上是反映逼近程度的函数,当 $f(\lambda) = 0$ 时,即实现了给定的逼近条件式(2).采用 Newton-Raphson 迭代法,由式(10)、式(11)及式(12)得计算 Lagrange 乘子 λ 及有限元节点值的迭代公式

$$\begin{cases} U_k = (\lambda_k^{-1} K_1 + K_2)^{-1} P \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{1}{2} \lambda_k^3 \frac{U_k^T K_2 U_k - 2U_k^T P + \hat{U}^T \hat{U} - \omega^2 T \sigma_{rms}^2}{U_k^T K_1 (\lambda_k^{-1} K_1 + K_2)^{-1} K_1 U_k} \end{cases} \quad (13)$$

其收敛条件为

$$|(\lambda_{k-1} - \lambda_k) / \lambda_k| \leq \epsilon \quad (14)$$

可以证明,迭代公式(13)是局部收敛的.

2.3 八节点等参数单元

八节点曲边四边形单元是一种效果比较好的有限单元体(如图1所示).

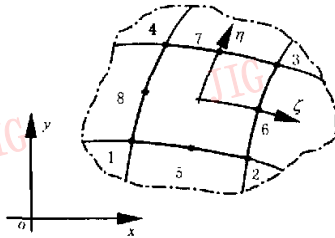


图1 八节点等参数单元

ξ, η 为单元的局部等参数坐标,单元的插值函数为不完全三次多项式^[8]

$$u(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 \quad (15)$$

单元的整体坐标由局部坐标定义如下

$$x(\xi, \eta) = \bar{N}X \quad (16)$$

其中, $x = \{x, y\}$, X 为单元的节点坐标向量:

$$X = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_8, y_8\}$$

\bar{N} 为单元的形函数矩阵:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

其中的形函数为^[8]

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi_i\xi + \eta_i\eta - 1) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad (i=5, 7) \quad (17)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad (i=6, 8)$$

形函数的导数为^[8]

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (18)$$

其中, Jacobi 矩阵 J 为^[8]

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

根据式(17)、式(18)可计算出式(6)、式(7)及式(8)中的 K_1, K_2 及 P .

由于这种方法中结合了对原始数据的平滑处理,因此,称之为平滑-有限元方法,其重建的图形图象具有光顺性,且光顺程度可通过调整式(4)平滑因子 ω 的大小来改变,一方面随着 ω 增大,光顺程度增加,逼近程度降低;另一方面,随着 λ 的增大,式(4)的逼近项作用增强,当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,式(4)完全退化成有限元最小二乘拟合问题,这时,方程(10)退化成

$$K_2 U = P \quad (20)$$

而随着 λ 的减小,平滑项的作用增强,当 $\lambda=0$ 时,重建的图形退化为平面.

3 仿真实验与结果分析

3.1 图形重建实例

对 Gaussian 函数进行仿真实验,其方程为

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (21)$$

$$x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$$

其数据点的数值由精确值叠加随机噪声来模拟

$$\hat{u}(x_i, y_i) = u(x_i, y_i) + R_i n_{\max} \quad (22)$$

其中, $u(x_i, y_i)$ 为数据点 i 的精确值; R_i 为 -1 到 $+1$ 分布的随机数; n_{\max} 为最大噪声幅值,此处取 $n_{\max} = 0.5u_{ave}$, u_{ave} 为函数的平均值.

计算精度由均方根误差 E_{rms} 来度量

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(\frac{P_{i,cal} - P_{i,ex}}{P_{ave}} \right)^2} \quad (23)$$

其中, $P_{i,cal}$ 为样点 i 的计算值; $P_{i,ex}$ 为样点 i 的精确值; P_{ave} 为测量区域内样点精确值的平均值.

取 $\sigma = 0.4$, 图2为方程(21)的精确图形.

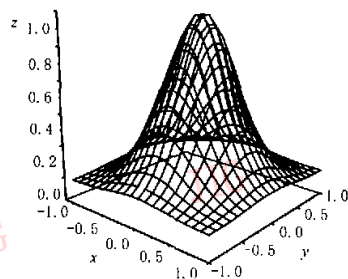


图2 Gaussian 函数图形

实验时,取 20×20 个数据点,采用 9×9 个八节

点等参数单元,这时每个单元内包含 4、6 或 9 个数据点不等,如图 3 所示.

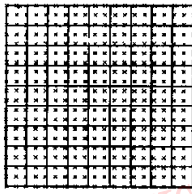


图 3 有限元网络与数据点

实际噪声的均方根误差值为 $\sigma_{rms}=0.2848$,图 4 (a)给出了由式(16)叠加随机噪声后的数据曲面.取平滑因子 $\omega=0.95$,并取初值 $\lambda_0=1.0$,迭代精度 $\epsilon=10^{-5}$,由式(13)经 9 次迭代后,收敛于 $\lambda=47.157$,图 4(b)为用平滑-有限元方法重建的三维曲面;图 4(c)为由 9×9 个八节点等参数单元最小二乘拟合($\lambda^{-1}=0$)的曲面.

原始数据带有 $\sigma_{rms}=28.475\%$ 的随机噪声,有限元最小二乘拟合误差为 30.539% ,由图 4(c)、图 5(c)可见,其逼近程度较差,误差比较大.但由图 4(b)、图 5(b)及图 3 可以看出,平滑-有限元方法重构的曲面与真实曲面极为接近,误差仅为 6.691% ,其逼近精度明显提高,说明该方法具有很好的抗噪性.

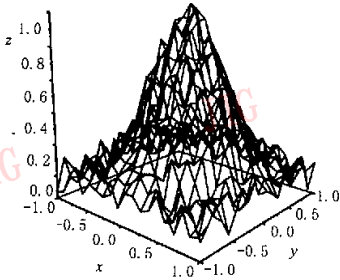
3.2 图象重建实例

图 6、图 7 给出了球面及马鞍面(双曲抛物面)图象的平滑-有限元方法处理结果.图 6(a)、图 7(a)为精确图象,图 6(b)、图 7(b)为加噪声的图象,它们均包含 50×50 个像素点,基于这些像素点采用有限元方法进行图象重建.图 6(c)、图 7(c)、图 6(d)、图 7(d)及图 6(e)、图 7(e)分别为采用 10×10 、 15×15 及 25×25 个八节点等参数单元处理的结果.迭代 Lagrange 乘子初值取 $\lambda_0=0.00001$,迭代精度取 $\epsilon=10^{-5}$,表 1 给出了所采用的平滑因子 ω 以及计算的迭代次数、计算出的 Lagrange 乘子 λ 与 P III 450 微机上的 CPU 计算时间.

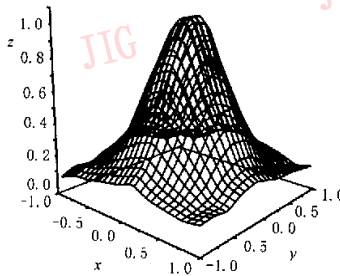
由图 6、图 7 及表 1 可看出,应用平滑-有限元方法,采用 15×15 个单元即可得到理想的重建图象,而且这种方法计算的速度很快,且收敛性好.

表 1 图象重建计算结果

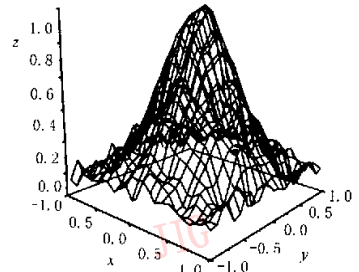
有限元网络	球面图象			鞍面图象		
	10×10	15×15	25×25	10×10	15×15	25×25
平滑因子 ω	1.05	1.05	1.05	0.98	0.98	0.98
迭代次数	8	8	8	8	7	7
Lagrange 乘子 λ	0.0565	0.0434	0.0406	1.2310	0.4345	0.0909
CPU 计算时间(s)	1.102	2.403	11.487	1.172	2.233	10.826



(a) 原始数据

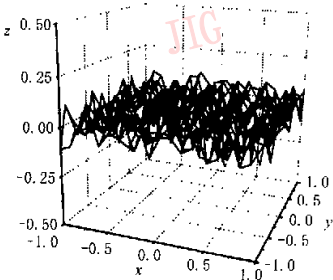


(b) 平滑-有限元法重建的图形

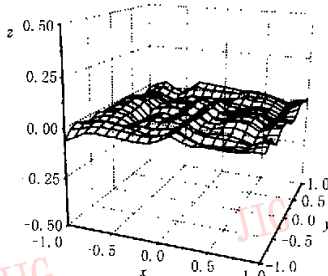


(c) 有限元最小二乘法拟合图形

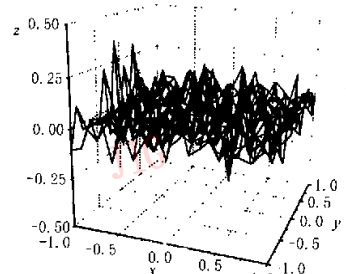
图 4 不同方法重建的三维曲面



(a) 原始数据



(b) 平滑-有限元法重建的图形



(c) 有限元最小二乘法拟合图形

图 5 不同方法重建图形的误差曲面

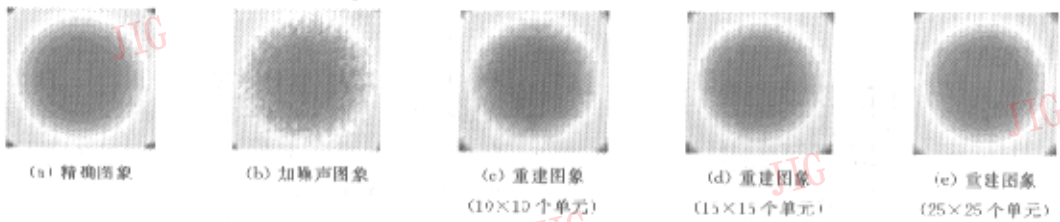


图5 平滑-有限元法重建的球面图象

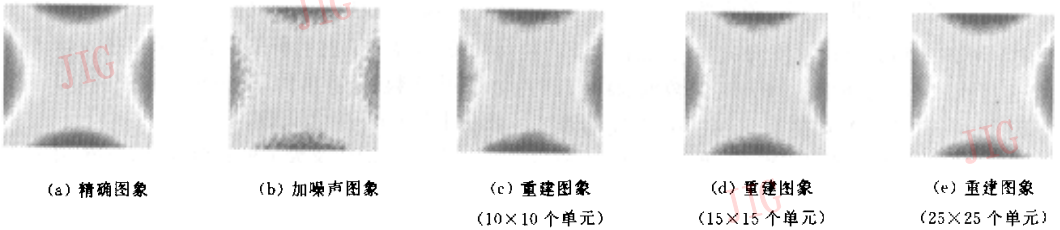


图7 平滑-有限元法重建的鞍面图象

图8(a)为一有孔复合材料板拉伸时的 Moiré 条纹图^[9]。由于板的变形分析是以条纹的级数与宽度为基础进行的,而条纹图中的噪声信号将影响计算结果,因此必须进行处理。图8(a)中方形区域图象包含 217×217 pixels,采用 27×27 个八节点等参数单元进行平滑-有限元处理,计算出的 Lagrange 乘子为 $\lambda = 0.0316$,图8(b)为重建的图象。由图8可以看出,噪声信号得到了有效的抑制。这里只采用了单一的平滑-有限元方法,如果再结合有效的边缘检测技术,其处理结果将会得到更进一步的改善。

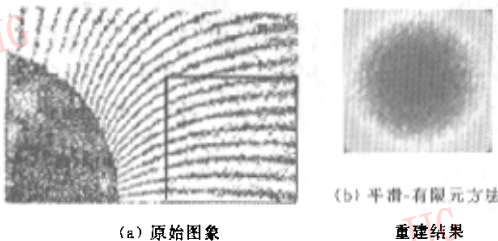


图8 Moiré 云纹图的处理结果

3.3 讨论与分析

当采用 9×9 个八节点等数参数单元、 20×20 个数据点、原始数据的均方根误差为 $\sigma_{rms} = 0.2848$,迭代初值 $\lambda_0 = 1.0$,迭代精度 $\epsilon = 10^{-5}$,在6个不同的平滑因子 ω 下,由平滑-有限元方法计算得到的 Lagrange 乘子 λ 、迭代次数及用公式(16)计算出的总体误差值如表2所示。

平滑因子 ω 值可根据逼近程度与光顺要求来

表2 平滑因子 ω 对计算精度 E_{rms} 的影响

ω	迭代次数	λ	$E_{rms} (\%)$
1.10	6	4.5483	15.220
1.00	8	11.738	9.108
0.95	9	47.157	6.691
0.90	9	196.79	7.614
0.85	9	457.64	8.806
0.80	9	884.36	10.225
0.70	10	3214.3	14.047

确定。 ω 的取值直接影响 Lagrange 乘子 λ ,即若 ω 减小,则 λ 增大,这时逼近效应增强,其再现的结果与原始数据越来越接近,而光顺效应则减弱,如果原始数据包含有较大的噪声信号,则重建的图形上将会有较多的起伏波动;反之,若 ω 增大,则 λ 减小,这时光顺效应增强,而逼近效应则减弱,再现的结果与原始数据的偏离越来越大,但重建的图形却越来越平滑。

对于有限元最小二乘拟合问题,每个单元内的数据点数一般应大于单元的自由度数,否则,可能导致有限元方程的系数矩阵奇异,无法求解。若采用八节点等参数单元,则单元内应包含8个或8个以上数据点,而采用平滑-有限元方法,则可以降低这一要求。由于平滑项的作用,使得某些单元内的数据点少于单元的自由度数时,有限元方程的系数矩阵仍不产生奇异,仍能求解,而且通常所采用的有限单元数量越多,描述曲面的效果越好,由于平滑-有限元方法,其单元内的数据点数可以少于单元自由度数,因此,对于同样数量的原始数据点,该方法可比最小二乘拟合采用更多的单元,这一点也表明其具有更

强的逼近效果。

表3给出了与5种有限元划分对应的计算精度,计算中,采用了 20×20 个数据点,原始数据的均方根误差为 $\sigma_{rms}=0.2848$,平滑因子 $\omega=0.95$ 。

表3 有限元划分对计算精度 E_{rms} 的影响

单元数	每个单元数据点数	λ	$E_{rms}(\%)$
10×10	4	36.067	6.909
9×9	4,6,9	47.157	6.891
8×8	4,6,9	67.559	6.687
7×7	6,9	106.75	6.610
6×6	9,12,16	163.67	6.618

对于本文讨论的实例,当采用 10×10 的有限元网格时,虽然每个单元仅有4个数据点,但也获得了比较好的结果。

原始数据点数越多,计算结果精度越好。表4给出了5种数据点所对应的计算精度。计算中采用了 7×7 的有限元网格,平滑因子取 $\omega=0.95$ 。

表4 数据点对计算精度 E_{rms} 的影响

数据点数	每个单元数据点数	λ	$E_{rms}(\%)$
20×20	6,9	106.75	6.640
18×18	6,9	38.335	6.939
16×16	4,6,9	26.592	7.684
14×14	4	27.605	9.389
12×12	2,4	20.675	14.123

对于 7×7 的有限元网格, 12×12 个数据点显得略少了一些,这时,由于每个单元内仅有2个或4个数据点,因而计算精度不高,但采用 14×14 、 16×16 或 18×18 数据点都能得到比较好的结果。

4 结 论

(1) 数值仿真实验结果表明,用于图形与图象重建的平滑-有限元方法具有比较好的滤除误差噪声的效果和比较高的逼近精度。

(2) 对于含有噪声的原始数据的处理,最小二乘拟合方法有时并不是最佳的选择,采用结合平滑处理技术的有限元方法所得到的结果往往更为令人满意。

(3) 采用本文这种计算方法时,由于单元内的数据点数可以少于单元自由度数,且可使用比最小二乘拟合法更多的单元,因而其描述图形与图象的能力比较强。

(4) 这种方法对数据点分布形式没有任何限制,并且其所使用的八节点曲边四边形等参单元可以描述任意形状的区域。

应当指出的是,采用平滑-有限元方法来处理稍为简单的图形与图象,虽能取得较好的结果,但用于比较复杂的图象处理时,还将涉及边缘检测、光照、遮挡以及图象的随意性等问题,这些问题都有待于进一步的研究。

参 考 文 献

- 1 Delinggette H, Herbert M, Ikeuchi K. Shape representation and image segmentation using deformable surfaces[J]. Image and Vision Computing, 1992,10(3):132~144.
- 2 钟慧湘,王征旋,庞云阶. 图象重建中的有理逼近方法[J]. 中国图象图形学报, 2000,5A(11):916~919.
- 3 荆人杰,叶秀清,许胜来. 计算机图象处理[M]. 杭州:浙江大学出版社,1990:447~518.
- 4 [德]布兰特著. 数据分析中的统计和计算方法[M]. 莫梧生译. 北京:国防工业出版社,1983:123~156.
- 5 苏步青,刘鼎元. 计算几何[M]. 上海:上海科学技术出版社,1980:217~252.
- 6 Reinsch C H. Smoothing by spline functions[J]. Numerische Mathematik, 1967,10:177~183.
- 7 Arora J S, Chahande A L, Paeng J K. Multiplier methods for engineering optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991,32:1485~1525.
- 8 [英]监凯维奇著. 有限元法(上册)[M]. 尹泽勇,江伯南译. 北京:科学出版社,1985:160~201.
- 9 Feng Z, Rowlands R E. Continuous full-field representation and differentiation of three-dimensional experimental vector data[J]. Computers & Structures, 1987,26(6):979~990.



蔡中义 1963年生,吉林大学锻压研究所副教授,2000年获吉林大学固体力学专业博士学位。主要研究方向为板材成形、有限元数值模拟及模具CAD/CAM。发表论文30余篇。



李明哲 1951年生,留日博士,吉林大学锻压研究所所长、教授、博士生导师。主要研究方向为板材成形、模具CAD/CAM、非接触测量以及数值模拟等。发表论文70余篇。